Online - Team Wettbewerb 2015

des Mathe-Treffs
der Bezirksregierung Düsseldorf

Lösungen für die Sekundarstufe I Stufen 7 und 8

1. Aufgabe (Papierschnitt):

a)

XXX
XXX
XXX

Es gibt 9 kleine Quadrate. Ein Beispiel ist hier rot markiert.

XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX

Es gibt vier Quadrate, die je aus 4 kleinen Quadraten bestehen.

XXX
XXX
XXX

Es gibt ein großes Quadrat, das aus 9 kleinen Quadraten besteht.

Insgesamt gibt es also 9 kleine Quadrate, 4 mittlere Quadrate und 1 großes Quadrat. So ergeben sich 14 Möglichkeiten, verschiedene Quadrate auszuschneiden.

b)

Kästchen – 1
Kästchen – 2
Kästchen – 4
Kästchen – 8
Kästchen – 16
Kästchen – 32
Kästchen – 64
Kästchen – 128
Kästchen – 256
Kästchen – 512
Kästchen – 1.024
Kästchen – 2.048
Kästchen – 4.096
Kästchen – 8.192
Kästchen – 16.384
Kästchen – 32.768

Addiert man alle Zahlen, so erhält man insgesamt 65.535 Rechenkästchen. So viele sind niemals auf einem einzigen Blatt Rechenpapier!

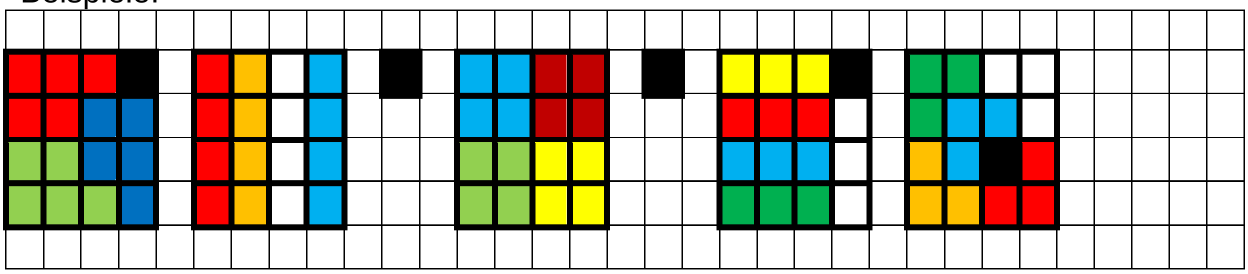
c)

Ein DIN-A4-Bogen ist 21,0 cm breit und 29,7 cm lang. Die ergibt in der Breite maximal 42 Rechenkästchen und 59 Rechenkästchen in der Länge. Ein Bogen hat maximal 2478 ganze Kästchen.

Aus Teilaufgabe b) wissen wir, dass wir 65535 kleine Rechenkästchen benötigen. Teilt man diese Summe durch die Anzahl der Kästchen pro Bogen so erhält man 26 ganze Bögen plus Rest – also man benötigt mindestens 27 Bögen. Dies kann man ganz leicht mit Excel lösen. Manchmal sind auch weniger Kästchen pro Bogen aufgedruckt. Hier erhöht sich dementsprechend die Anzahl der notwendigen Bögen.

d)

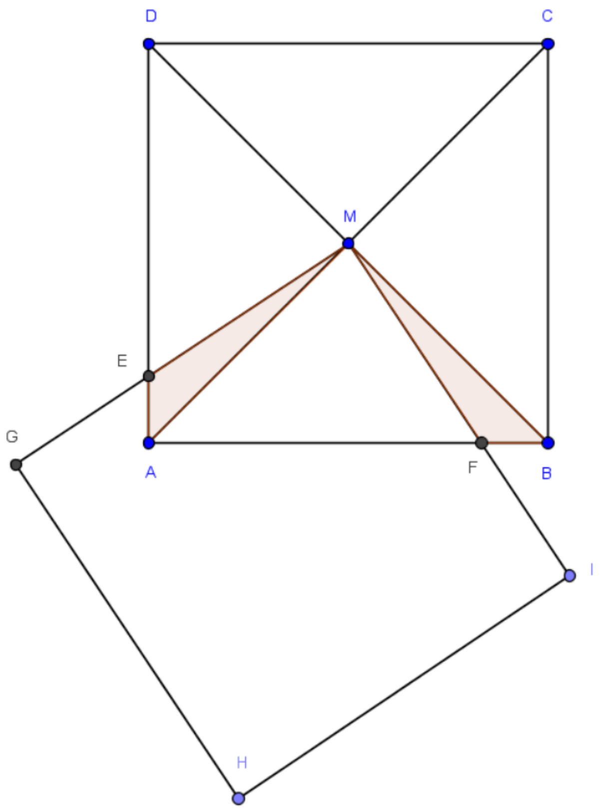
Beispiele:



Beim Vierteln des Quadrates bleibt das schwarze Quadrat jeweils daneben liegen.

Aufgabe 2 (Patente Patentante Patty):

Man betrachtet als erstes nur ein Quadrat. Dies überdeckt genau ein Viertel des unteren Quadrates. Die Dreiecke AME und FBM sind kongruent.
Begründung:
|AM|= |MB| sind, (halbe Diagonale des Quadrates ABCD).
Quadrat MGHI wird um einen gewissen Winkel um den Schnittpunkt der Diagonalen M gedreht, also ist der Winkel EMA gleich FMB und Winkel EAM ist gleich MBF = 45°, da sie auf der Diagonalen liegen.
Nach dem Kongruenzsatz wsw sind die beiden Dreiecke also kongruent.

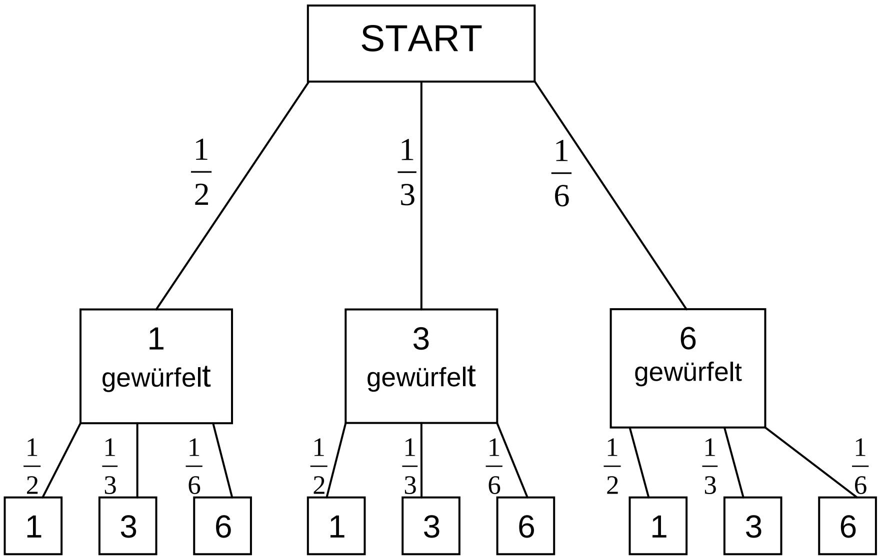


Liegt das Viereck IMGH, so dass es mit dem Viereck ABCD die Fläche des Dreiecks ABM gemeinsam hat, so überdeckt das Viereck IMGH genau ein Viertel des Vierecks ABCD.
Wird jetzt das Viereck um den Winkel EMA gedreht, kommt auf der linken Seite die Dreiecksfläche AME „dazu“, welche auf der rechten Seiten vom Viertel des Vierecks weggenommen wird.
Dies gilt, da die entsprechenden Dreiecke kongruent sind (siehe Begründung oben).

Also überdecken drei gleiche Quadrate vom vierten gleichen Quadrat genau drei Viertel der Fläche. Es bleibt also immer ein Viertel der Fläche des unteren Quadrates unbedeckt.

Aufgabe 3 (Zocken auf dem Straßenfest):

Die Reihenfolge spielt keine Rolle, deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, z.B. erst eine eins und anschließend eine sechs zu werfen gleich der Wahrscheinlichkeit, erst eine sechs und anschließend eine eins zu werfen.



$$P(\{1,1\})=\frac{1}{4},\ P(\{1,3\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3},\ P(\{1,6\})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P(\{3,3\})=\frac{1}{9},\ P(\{3,6\})=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9},\ P(\{6,6\})=\frac{1}{36}.$$

Ausfall	{1,1}	{1,3}	{1,6}	{3,3}	{3,6}	{6,6}
Gewinn	-30ct	-10ct	+20	+10ct	+40ct	+70ct
Wahrscheinlichkeit	1/4	1/3	1/6	1/9	1/9	1/36

Der durchschnittliche Gewinn ergibt sich:

$$\text{Gewinn} = \frac{1}{4}\cdot(-30) + \frac{1}{3}\cdot(-10) + \frac{1}{6}\cdot 20 + \frac{1}{9}\cdot 10 + \frac{1}{9}\cdot 40 + \frac{1}{36}\cdot 70 = 0.$$

Das Spiel ist also fair.

Aufgabe 4 (Ein altes Geheimrezept)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Die Geschichte soll mit Hilfe verschiedener Symbole weitergeschrieben werden. Im Folgenden ist lediglich ein Beispiel für den Fortlauf der Geschichte dargestellt.

In der schönen Stadt ϱ- (Rostock) lebt eine kleine π--N- (Piraten)familie.

Eines Morgens wacht der jüngste Sohn Sohn φ- (Philippe) mit hohem φ- (Fieber) auf. Die π--N -(Piraten)-Mutter kommt schnell mit einer Schüssel in τ- (Tauwasser) gekochtem ϱ-T - (Rotkohl) angelaufen.

„Ein altes Geheimrezept!“ erzählt sie. Doch ihr Jüngster bleibt μ-D (müde) und erschöpft im Bett liegen.
Nach kurzer Beratung fasst die Familie einen Plan und …

beschließt, den kleinen φ- (Philippe) zu einem Arzt zu bringen. „Der muss zu einem χ-ρ-praktiker (Chiropraktiker)!“, ruft sein Bruder σ (Sigmar). „Der hat doch nichts mit den Knochen.“ entgegnet seine Mutter Katrin ζ (Zeta) „Er muss zu einem μ- -  (Mystiker).“

„ω (Oh, mega) Idee!“, rief sein Vater von der oberen η-G (Etage) herunter.
Geschwind packten alle ein paar ihrer VII (sieben) Sachen zusammen für die lange Reise.

Doch schon als σ (Sigmar) die Tür öffnen will, zuckt er erschrocken zurück. „Da ist etwas vor der Tür!“ ruft er. „Ist das ein λ (Lamm da)?“
„Nein“, sagte der Vater, der geschwind hinzu kam „das ist doch eine Ziege!“
„Ihr seid doch alle nicht mehr normal.“ rief der Vater „Ihr müsst doch alle mal zum ψ-χ-@-  (Psychiater).“