1. Aufgabe (Papierschnitt):

a)

XXX
XXX
XXX

Es gibt 9 kleine Quadrate. Ein Beispiel ist hier rot markiert.

XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX
XXX	XXX	XXX	XXX

Es gibt vier Quadrate, die je aus 4 kleinen Quadraten bestehen.

XXX
XXX
XXX

Es gibt ein großes Quadrat, das aus 9 kleinen Quadraten besteht.

Insgesamt gibt es also 9 kleine Quadrate, 4 mittlere Quadrate und 1 großes Quadrat. So ergeben sich 14 Möglichkeiten, verschiedene Quadrate auszuschneiden.

b)

Kästchen – 1
Kästchen – 2
Kästchen – 4
Kästchen – 8
Kästchen – 16
Kästchen – 32
Kästchen – 64
Kästchen – 128
Kästchen – 256
Kästchen – 512
Kästchen – 1.024
Kästchen – 2.048
Kästchen – 4.096
Kästchen – 8.192
Kästchen – 16.384
Kästchen – 32.768

Addiert man alle Zahlen, so erhält man insgesamt 65.535 Rechenkästchen. So viele sind niemals auf einem einzigen Blatt Rechenpapier!

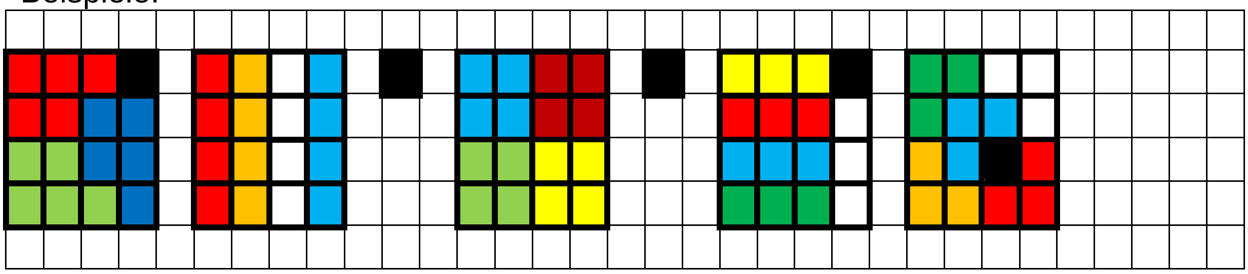
c)

Ein DIN-A4-Bogen ist 21,0 cm breit und 29,7 cm lang. Die ergibt in der Breite maximal 42 Rechenkästchen und 59 Rechenkästchen in der Länge. Ein Bogen hat maximal 2478 ganze Kästchen.

Aus Teilaufgabe b) wissen wir, dass wir 65535 kleine Rechenkästchen benötigen. Teilt man diese Summe durch die Anzahl der Kästchen pro Bogen so erhält man 26 ganze Bögen plus Rest – also man benötigt mindestens 27 Bögen. Dies kann man ganz leicht mit Excel lösen. Manchmal sind auch weniger Kästchen pro Bogen aufgedruckt. Hier erhöht sich dementsprechend die Anzahl der notwendigen Bögen.

d)

Beispiele:



Beim Vierteln des Quadrates bleibt das schwarze Quadrat jeweils daneben liegen.

e)

Der Streifen hat eine Länge von 2,24m.
Die experimentelle Herangehensweise liefert einen ungefähren Wert des Längenmaßes.
Der genaue Wert lässt sich über die Fläche berechnen. Das zur Verfügung stehende Dreieck hat das Flächenmaß $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 16cm \cdot 28cm = 224cm^2$. Der rechteckige Streifen hat dasselbe Flächenmaß, weil er lückenlos zusammengesetzt werden soll, nämlich $A_{Streifen} = 1cm \cdot 224cm = 224cm^2$, mit einer Länge von 224cm.
Wichtige Anmerkung: Vom großen Dreieck werden 27 Streifen in Trapezform abgeschnitten; übrig bleibt ein kleines Dreieck. Diese 28 Teile lassen sich nur deshalb passend zu einem Rechteckstreifen zusammenlegen, weil ihre Anzahl gerade ist!

f)

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist die Angabe der exakten Zahlen kaum möglich. Deshalb kommt es vielmehr auf eine begründete Schätzung an. Diese kann im Einzelfall auch stark von dieser Lösung abweichen.

Zahl der Kästchen pro Bogen

Ein DIN-A4-Bogen ist 21,0 cm breit und 29,7 cm lang. Dies ergibt in der Breite maximal 42 Rechenkästchen und 59 Rechenkästchen in der Länge. Ein Bogen hat maximal 2478 ganze Kästchen.

Zahl der Würfelchen pro Bogen
500 Blatt DIN-A4-Papier (80 g/m²) liefern einen Stapel von 5cm Höhe. Also hat ein Blatt eine Dicke von
0,1 mm.

Rechnet man noch die Klebstoffdicke dazu, so benötigt man statt 50 Blattschichten für 5 mm Dicke wahrscheinlich nur 25 Blattschichten.
Also kann man aus einem Bogen etwa (2478 : 25 ≈ 90) 90 kleine Würfelchen mit einer Kantenlänge von 5 mm herstellen.

Flächenbedeckung aus einem Bogen

Diese können eine Fläche von 90 mal 25 mm² = 2250 mm² Fläche bedecken. (1)

Oberfläche des Burj Khalifa

Jetzt schätzen wir das Burj Khalifa Gebäude ab. Dazu denken wir uns, dass das Gebäude die Form eines Kegels hat. Hier wären auch andere, genauere Abschätzungen möglich. Von diesem Kegel bestimmen wir die Mantelfläche, die man mit den kleinen Würfelchen „baut".

Aus dem Internet erhält man folgende Angaben, welche auch noch voneinander abweichen können:
Höhe (inklusive Antenne): etwa 830 m, Bodenplatte, welche wir gleich der Kreisfläche des Kegels setzen 7000 m², dies ergibt einen Radius von ca.
$\sqrt{\frac{7000\text{m}^2}{\pi}} \approx 47\,\text{m}$ des Grundkreises des Gebäudes.

Für die Mantelfläche eins Kegels gilt: $A_M = \pi \cdot r \cdot s$, wobei r der Radius des Grundkreises, s die Länge der Mantelfläche des Kegels ist. Es gilt weiterhin
$s = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(47\text{m})^2+(830\text{m})^2} \approx 830\,\text{m}.$
Daraus ergibt sich eine Mantelfläche von etwa 122550 m².

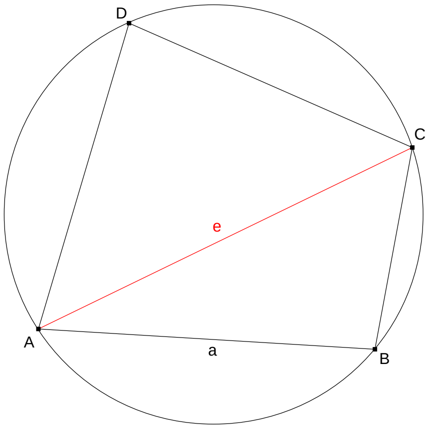
Bestimmung der Bögenzahl

Teilt man diese Fläche durch die Fläche, die man aus (1) erhält also 2250 mm² ergibt sich: $122550 \text{ m}^2 : 2250 \text{ mm}^2 = 122550 \text{ m}^2 : 2{,}25 \cdot 10^{-3} \text{m}^2 \approx 54{,}5 \cdot 10^{6}$.
Man benötigt etwa 54,5 Millionen Bögen DIN A4 Papier und diesen Turm entsprechend umzubauen.
Ein Paket mit 500 Blatt hat eine Höhe von 5cm. Somit bräuchten wir 109.000 solcher Pakete. Übereinandergestapelt ergeben alle benötigten 500-Blatt-Pakete einen Turm von 5450 m = 5,45 km.

Mit diesem Lösungsweg erhält man sicherlich nur eine grobe Abschätzung für die Anzahl der DIN-A4 Bögen. Andere begründete Lösungswege - sofern die Schritte unserer Lösung dargelegt werden - mit vielleicht auch einer stark abweichenden Lösung sind natürlich auch richtig.

Aufgabe 2 (Der verwunschene Turm):

Der junge Évariste Galois (1811 bis 1832) bekam die Aufgabe, aus den gegebenen Längen der Seiten eines Sehnenvierecks die Längen der Diagonalen zu bestimmen.



$$\sphericalangle ADC = 180° - \beta \;\; und \; \cos\left(180° - \beta\right) = -\cos\beta$$
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\left(180° - \beta\right)$$
$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$$
$$2\cos\beta \cdot \left(ab + cd\right) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$
$$2\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$$
$$e^2 = a^2 + b^2 - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}$$
$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}}$$

Die Bestimmung von f erfolgt analog.

Es lassen sich für e und f auch folgende äquivalente Gleichungen finden:

$$e = \sqrt{\frac{\left(ac + bd\right)\left(bc + ad\right)}{ab + cd}}$$
$$f = \sqrt{\frac{\left(ac + bd\right)\left(ab + cd\right)}{bc + ad}}$$

Aufgabe 3 (Albertus Magnus):

Für die Lösung werden hier die Symbole umbenannt:

$\frac{29}{a}$	$\frac{14}{b}$	$\frac{11}{a}$
$\frac{7}{c}$	$\frac{8}{b}$	$\frac{5}{d}$
$\frac{53}{a}$	$\frac{2}{b}$	$\frac{7}{e}$

Es handelt sich notwendiger Weise um ein „Magisches Quadrat“.

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit 5 unbekannten. Wobei die Variablen a bis e nur natürliche Zahlen sein dürfen.

1. Zeile = 2. Spalte:

$$\frac{29}{a}+\frac{14}{b}+\frac{11}{a}=\frac{24}{b}$$
$$4b=a$$

Daraus folgt, dass a durch 4 Teilbar sein muss.

1. Zeile = 1. Spalte:

$$\frac{40}{a}+\frac{14}{b}=\frac{82}{a}+\frac{7}{c}$$
$$\frac{56}{4b}=\frac{42}{4b}+\frac{7}{c}$$
$$c=2b$$

Damit muss c eine gerade Zahl sein.

1. Zeile = 3. Zeile:

$$\frac{40}{a}+\frac{14}{b}=\frac{53}{a}+\frac{2}{b}+\frac{7}{e}$$
$$\frac{12}{b}=\frac{13}{a}+\frac{7}{e}$$
$$\frac{48}{4b}=\frac{13}{4b}+\frac{7}{e}$$
$$5e=4b$$

Also ist b durch 5 teilbar und e durch 4.

1. Zeile = 3. Spalte:

$$\frac{40}{a}+\frac{14}{b}=\frac{11}{a}+\frac{5}{d}+\frac{7}{e}$$
$$\frac{29}{a}+\frac{14}{b}=\frac{5}{d}+\frac{7}{e}$$
$$\frac{29}{4b}+\frac{56}{4b}=\frac{5}{d}+\frac{35}{4b}$$
$$5d=2b$$

Daraus folgt, dass d eine gerade Zahl sein muss und b wieder durch 5 teilbar ist.
Mit den Voraussetzungen ist b = 5, a = 20, c = 10, d = 2 und e = 4.
In jeder Spalte, Zeile und Diagonale ergibt sich somit die magische Zahl (Summe) von $\frac{24}{5}$.

Natürlich sind weiter magische Zahlen, wie $\frac{24}{10}$, $\frac{24}{15}$, usw. ebenfalls Lösungen des magischen Quadrates.

Aufgabe 4 (Ein altes Geheimrezept)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Die Geschichte soll mit Hilfe verschiedener Symbole weitergeschrieben werden. Im Folgenden ist lediglich ein Beispiel für den Fortlauf der Geschichte dargestellt.

In der schönen Stadt ϱ- (Rostock) lebt eine kleine π--N-(Piraten)familie.

Eines Morgens wacht der jüngste Sohn Sohn φ- (Philippe) mit hohem φ- (Fieber) auf. Die π--N-(Piraten)-Mutter kommt schnell mit einer Schüssel in τ- (Tauwasser) gekochtem ϱ-T- (Rotkohl) angelaufen.

„Ein altes Geheimrezept!“ erzählt sie. Doch ihr Jüngster bleibt μ-D (müde) und erschöpft im Bett liegen.
Nach kurzer Beratung fasst die Familie einen Plan und …

beschließt, den kleinen φ- (Philippe) zu einem Arzt zu bringen. „Der muss zu einem χ-ρ-praktiker (Chiropraktiker)!“, ruft sein Bruder σ (Sigmar). „Der hat doch nichts mit den Knochen.“ entgegnet seine Mutter Katrin ζ (Zeta) „Er muss zu einem μ- -  (Mystiker).“

„ω (Oh, mega) Idee!“, rief sein Vater von der oberen η-G (Etage) herunter.
Geschwind packten alle ein paar ihrer VII (sieben) Sachen zusammen für die lange Reise.

Doch schon als σ (Sigmar) die Tür öffnen will, zuckt er erschrocken zurück. „Da ist etwas vor der Tür!“ ruft er. „Ist das ein λ (Lamm da)?“
„Nein“, sagte der Vater, der geschwind hinzu kam „das ist doch eine Ziege!“
„Ihr seid doch alle nicht mehr normal.“ rief der Vater „Ihr müsst doch alle mal zum ψ-χ-@-  (Psychiater).“